

Arrovian Aggregation of Convex Preferences

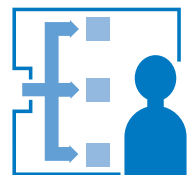
Felix Brandt

(joint work with Florian Brandl)

International Conference on Mathematical Optimization for Fair Social Decisions:

A tribute to Michel Balinski

Paris, December 2019



DSS
Decision Sciences & Systems



2002

Le scrutin

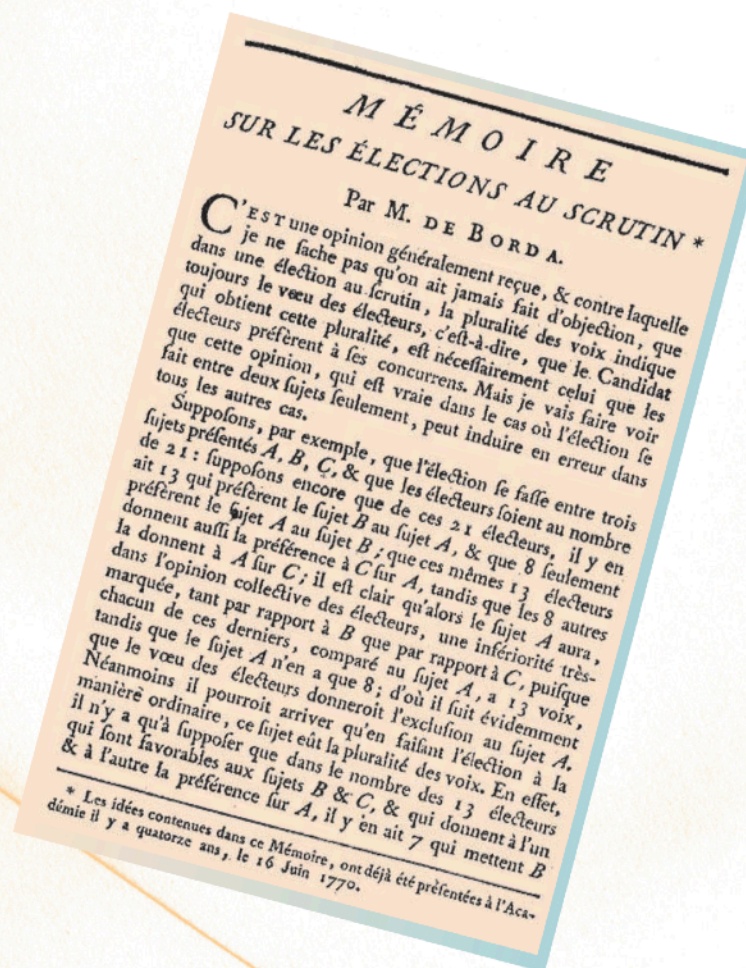
MICHEL BALINSKI

Le Graal inaccessible d'une méthode de vote est qu'elle reflète absolument les préférences des électeurs. Si une méthode est toujours imparfaite, en existerait-il qui évitent au mieux tricheries et regrets?

C'est une opinion généralement reçue, et contre laquelle je ne sache pas qu'on ait jamais fait d'objection, que dans une élection au scrutin, la pluralité des voix indique toujours le vœu des électeurs, c'est-à-dire que le candidat qui obtient cette pluralité est nécessairement celui que les électeurs préfèrent à ses concurrents. Mais je vais faire voir que cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas.

M. le Chevalier de BORDA, *Mémoire sur les élections au scrutin*, Histoire de l'Académie royale des sciences, 1784 (avec la mention: «Les idées contenues dans ce Mémoire ont déjà été présentées à l'Académie il y a 14 ans, le 16 juin, 1770.»)

Et si, en ce printemps 2002, les urnes désignaient pour président un candidat autre que celui réellement voulu par les électeurs? La possibilité n'est pas à négliger. Le Chevalier de Borda en était conscient dès 1770. Il semble que cette possibilité se soit concrétisée à plusieurs reprises, à d'autres époques, dans d'autres circonstances, en utilisant divers modes de scrutin pour désigner un élu



Il semble que non. L'argumentation pour s'en convaincre est simple. Il est peu probable qu'un électeur ayant voté pour Buckley ait préféré Ottinger à Goodell, ni que celui qui ait voté pour Ottinger puisse préférer Buckley à Goodell. En revanche, ceux favorables à Goodell étaient partagés entre Buckley et Ottinger, vraisemblablement dans des pourcentages légèrement en faveur d'Ottinger. Cela implique que les préférences de l'électorat étaient environ celles indiquées sur la figure 1. Goodell aurait battu Ottinger dans une confrontation directe (39 % + 10 % + 14 % = 63 % des voix), et, opposé à Buckley, Goodell aurait gagné (37 % + 10 % + 14 % = 61 %).

Le candidat réellement voulu

Pour désigner un candidat parmi plusieurs, Condorcet proposa: «Que chaque électeur prononça son vœu complet par un jugement comparatif entre tous les candidats pris deux à deux, et que du résultat du vœu de la majorité sur chacun de ces jugements comparatifs on pût déduire le résultat de son vœu général.»

Quand un candidat est majoritaire contre tout opposant,

% DES ÉLECTEURS	39
ORDRES DE PRÉFÉRENCE	BUCKLEY OTTINGER GOODELL

1. PRÉFÉRENCES DES ÉLECTEURS
obtenus dans trois face-à-face.
voix obtenues par le candidat
colonnes. La première colonne i

WAECHTER	LAGUILLER
3,9 %	2,0 %

2. ÉLECTION PRÉSIDENTIELLE
valables. Raymond Barre était v

deux tours,..., nul ne peut
s'il n'a obtenu un nombre c
du nombre d'électeurs ins

Ainsi, si Buckley, Goodell
dats à la présidence en Fra
aurait été éliminé au prem
semblée, Goodell se serait
Ottinger est élu au second
vaincu: le remède des deu

D'ailleurs, il est prétendu
Raymond Barre aurait gag
candidats en confrontation
Jacques Chirac en tête-à-t
les voix des candidats à g
Moins sûr, mais généralem
terrand aussi (sur la figure
Mitterrand est 50,9 %). Or
le premier tour: le candid

«Erreurs» australiennes et irlandaise: le vo

L'Australie et l'Irlande pra
rentiel. Un électeur exprime
didats: son premier choix,
Australie, il est obligé de
bulletin est invalide). Si u
des premiers choix, il es

WAECHTER	LAGUILLER	BOUSSELL-LAMBERT	LAJOINIE	JUQUIN	MITTERRAND	BARRE	CHIRAC	LE PEN
3,9 %	2,0 %	0,4 %	6,7 %	2,1 %	34,1 %	16,5 %	20,0 %	14,4 %

2. ÉLECTION PRÉSIDENTIELLE 1988 : pourcentages des suffrages valables. Raymond Barre était vraisemblablement le candidat-Condorcet,

c'est-à-dire qu'il aurait battu tous les autres candidats dans des confrontations face-à-face, mais il a été éliminé au premier tour...

deux tours,..., nul ne peut être candidat au deuxième tour s'il n'a obtenu un nombre de suffrages au moins égal à 12,5 % du nombre d'électeurs inscrits» (Code électoral).

Ainsi, si Buckley, Goodell et Ottinger étaient des candidats à la présidence en France (ou à la députation), Goodell aurait été éliminé au premier tour (ou, prétendant à l'Assemblée, Goodell se serait retiré ou maintenu inutilement), Ottinger est élu au second tour, donc le candidat voulu est vaincu: le remède des deux tours ne guérit pas le vice.

D'ailleurs, il est prétendu qu'aux présidentielles de 1988, Raymond Barre aurait gagné contre n'importe qui des autres candidats en confrontations directes. Qu'il aurait vaincu Jacques Chirac en tête-à-tête paraît évident: ses 16,5 % plus les voix des candidats à gauche sur la figure 2, font 65,6 %. Moins sûr, mais généralement admis, Barre aurait battu Mitterrand aussi (sur la figure 2, le total des voix à la droite de Mitterrand est 50,9 %). Or Raymond Barre ne franchit pas le premier tour: le candidat voulu a été éliminé.

«Erreurs» australienne et irlandaise: le vote préférentiel

L'Australie et l'Irlande pratiquent le vote *alternatif* ou *préférentiel*. Un électeur exprime ses préférences entre tous les candidats: son premier choix, son deuxième,..., son dernier (en Australie, il est obligé de les classer tous, autrement son bulletin est invalide). Si un candidat a la majorité absolue des premiers choix, il est élu. Sinon, le candidat ayant le plus petit nombre de premiers choix est éliminé, donc les deuxièmes choix des électeurs ayant préféré le candidat éliminé deviennent des premiers choix – et le nouveau total des premiers choix est calculé: si maintenant un candidat obtient une majorité absolue des premiers choix, il est le vainqueur. Autrement, celui avec le plus petit nombre de premiers choix est de nouveau éliminé, et ainsi de suite.

Quel aurait été le résultat pour l'élection sénatoriale de New York? Si les électeurs s'étaient prononcés en conformité avec les préférences déduites sur la figure 1, alors sans aucune majorité absolue des premiers choix, Goodell aurait été éliminé, et les premiers choix qui restent se seraient

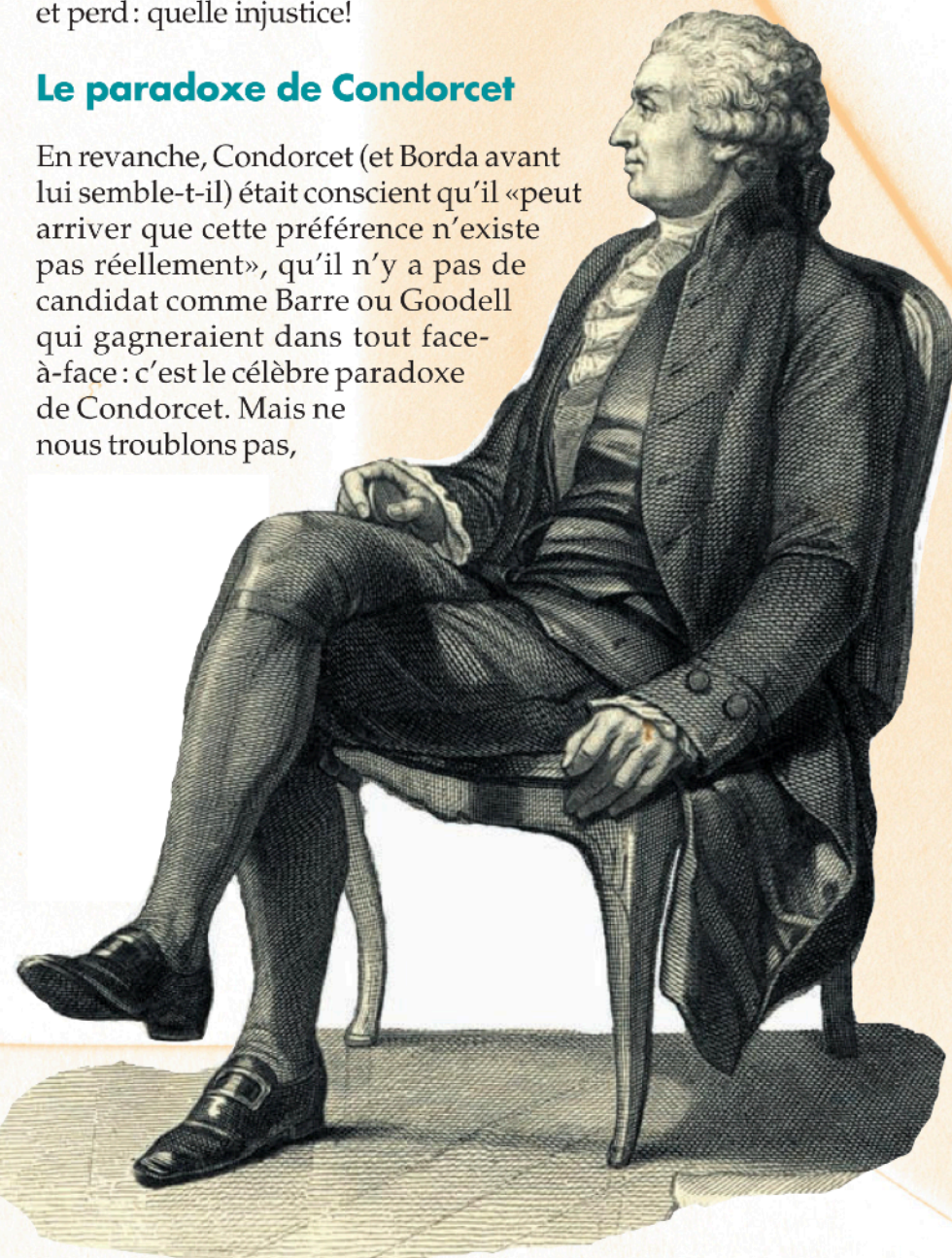
3. PHILOSOPHE, MATHÉMATICIEN ET HOMME POLITIQUE, Jean-Antoine-Nicolas Caritat, marquis de Condorcet, est né à Ribemont en septembre 1743 et mort en mars 1794 dans la prison de Bourg-la-Reine.

partagés 49 % pour Buckley et 51 % pour Ottinger: ce dernier aurait été vainqueur. Erreur une fois de plus!

Pire, si certains électeurs changeaient d'avis et décidaient de classer un candidat *A* plus haut, *A* pourrait bien en pâtir! L'exemple de la figure 4 le démontre: 15 % des électeurs pour qui le classement initial (à gauche) était $B > C > D > A$ sont séduits par le discours du candidat *A*, et optent pour le classement $A > B > C > D$. Rien d'autre ne change. Résultat: *A* gagnant au départ est perdant à l'arrivée, remplacé par *D*. Le candidat *A* a la préférence de plus d'électeurs et perd: quelle injustice!

Le paradoxe de Condorcet

En revanche, Condorcet (et Borda avant lui semble-t-il) était conscient qu'il «peut arriver que cette préférence n'existe pas réellement», qu'il n'y a pas de candidat comme Barre ou Goodell qui gagneraient dans tout face-à-face: c'est le célèbre paradoxe de Condorcet. Mais ne nous troublons pas,



dell (avec 27 % des voix) Goodell s'impose (27 % + 10 % + 10 % = 47 %) Ottinger sera élu (16 % + 21 % + 10 % = 47 %) de New York dans l'ordre B, C, D, A, mais pas d'un autre, monsieur Hugo...

Ici chaque électeur se confronte face au gagnant de la procédure précédente. Pour ser les candidats en face-à-face, l'ordre de présentation compte. Le candidat, tous les candidats, d'être le dernier dans lequel se font les consultations. On connaît de ce paradoxe des délibérations dans des assemblées.

L'impossibilité

Quelle règle faut-il transformer le problème en un choix d'Arrow a généré le paradoxe de Condorcet pour démontrer d'impossibilité de déceler la volonté du peuple dans tout

Arrow pose le problème à partir des préférences de chaque membre du «fil» de la société. Les préférences des électeurs 4 ou 5 – établissant la préférence de la collectivité.

% DES ÉLECTEURS
ORDRES DE PRÉFÉRENCE

4. AVANT LE DISCOURS vainqueur. Après le discours, *C* est d'abord élu, puis *B*, et enfin *A*.

une fois de plus!
changeaient d'avis et déci-
A plus haut, A pourrait bien
4 le démontre: 15 % des élec-
l (à gauche) était $B > C > D > A$
candidat A, et optent pour le
d'autre ne change. Résultat:
à l'arrivée, remplacé par D.
plus d'électeurs

Condorcet

da avant
qu'il «peut
l'existe
pas de
modell
ce-
e



mais pas d'une écharpe enroulée autour de son cou, comme monsieur Hugo...
Ici chaque candidat l'emporterait face au gagnant des deux autres! Si la procédure de vote consistait à opposer les candidats sur deux tours de face-à-face, l'élu du premier tour se présentant contre le troisième candidat, tous les candidats s'efforceraient d'être le dernier à entrer en lice: l'ordre dans lequel se déroule une suite de consultations importe (ce qui est bien connu de ceux qui ont participé à des délibérations et prises de décision dans des assemblées).

L'impossibilité d'Arrow

Quelle règle faut-il alors choisir pour transformer les préférences d'individus en un choix de la Société? Kenneth Arrow a généralisé le paradoxe de Condorcet pour énoncer un théorème d'impossibilité: il n'est pas possible de déceler la volonté électorale d'un peuple dans toutes circonstances.

Arrow posa la question: comment, à partir des préférences individuelles de chaque membre d'une société – du «profil» de la société, tels les ordres de préférences des électeurs sur les figures 1, 4 ou 5 – établir un seul ordre de préférence de la collectivité toute entière?

	AVANT LE DISCOURS DE A				APRÈS LE DISCOURS DE A			
% DES ÉLECTEURS	15 %	24 %	29 %	32 %	15 %	24 %	29 %	32 %
ORDRES DE PRÉFÉRENCE	B C D A	C D A B	D A C B	A D C B	A B C D	C D A B	D A C B	A D C B

4. AVANT LE DISCOURS DU CANDIDAT A, le vote préférentiel élimine B, puis D, et donc A est

didats parmi plusieurs autres n'ont sur-
fire de connaître seulement les
préférences de chaque Français entre
ces trois – leurs prédilections concer-
nant les autres ne devant en rien modi-
fier le classement entre ces trois
candidats.

Ces trois exigences sont tout à fait raisonnables, innocentes et bien modestes. Hélas, elles sont incompatibles. Il est impossible d'établir dans tous les cas un tel classement pour la France entière – et, *a fortiori*, d'identifier un seul favori du pays entier. Si les Français sont autorisés d'avoir les préférences qu'ils veulent, sans restriction (et comment les contrôler?), le paradoxe de Condorcet ne peut être écarté: aucun système, de n'importe quelle complexité, d'un ou de plusieurs tours, avec votes pondérés ou non, n'échappe à cette triste déduction.

Néanmoins, dans une démocratie, il faut choisir – il faut, d'une manière ou d'une autre, élire un président, des députés, des maires et des conseillers...

La méthode de Borda

Certains clament que la panacée est la proposition de Borda. Ils ne sont pas entendus: utilisée à diverses reprises – y compris pour l'élection des membres

façons é
(1) U
candida
degré d
cun...»
dat, un
nombre
s'il y a
attribué
1 et le de
à un car
points q
torat, et
l'ordre d

(2) U
précédé
aurait la
face-à-f
contre D
ticulière
de Bord
qu'il au
tions pa
c'est-à-d
ligne du
pour l'o
(voir la f

88 voix p
et 88 po
dat-Cor

Néa
souffre d
inventé
didat-C
toujour
Madam
Kenneth
candida
retiraie
est alor
scores d

Il est vraisemblable qu'avec le vote par assentiment, Goodell, le candidat-Condorcet de l'élection sénatoriale de New York en 1970, aurait gagné. L'hypothèse fondée est qu'une moitié des électeurs auraient voté seulement pour leur premier choix, l'autre moitié pour leur deux premiers choix, donc les totaux des voix auraient été dans les proportions : Buckley 39+10 février = 44, Goodell 39/2+37/2+10+14 = 62, et Ottinger 37+14 février = 44.

Quand il y a exactement trois candidats, le vote par assentiment est la seule, parmi une certaine classe, qui incite les électeurs à voter sincèrement. La démonstration est facile. Il faut toujours voter pour son premier choix, jamais pour son dernier. Un choix stratégique est inévitable : parfois on vote pour les deux premiers, parfois pas. Dans les deux cas, le vote est sincère. Mais s'il y avait quatre candidats, et si la préférence d'un électeur était $A > B > C > D$, et si les sondages montraient un écart insignifiant entre A et B et aussi entre C et D , alors il serait incité à l'insincérité, à voter pour A et pour C , mais pas pour B .

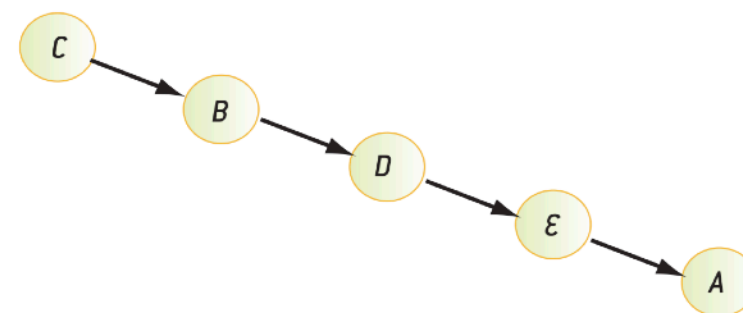
Néanmoins, le vote par assentiment est une méthode raisonnable et pratique. Des hypothèses plausibles concernant les chances relatives des candidats d'être dans des affrontements serrés suggèrent que les électeurs devraient voter sincèrement. Après tout, si je vote pour A et je pré-

8. AVEC DES SCRUTINS DIFFÉRENTS, TOUS LES CANDIDATS POURRAIENT GAGNER! Supposons qu'un électorat fictif ait les préférences du tableau ci-dessous pour cinq candidats dénommés A, B, C, D et E . Ainsi, 16% des électeurs classent les candidats dans l'ordre $B > D > C > E > A$.

% DES ÉLECTEURS	33 %	16 %	3%	8 %	18 %	22 %
ORDRES DE PRÉFÉRENCE	A B C D E	B D C E A	C D B A E	C E B D A	D E C B A	E C B D A

Sur la base de ces données, le tableau des scores des dix face-à-face et le graphe associé de ses préférences dans les confrontations deux à deux sont :

	A	B	C	D	E
A	—	33%	33%	33%	36%
B	67%	—	49%	79%	52%
C	67%	51%	—	66%	60%
D	67%	21%	34%	—	70%
E	64%	48%	40%	30%	—



Chaque case du tableau contient les voix obtenues par le candidat de la ligne en confrontation avec celui de la colonne. Par exemple, C gagne en face-à-face contre D avec $33 + 3 + 8 + 22 = 66\%$ des voix. Dans cet exemple, chacun des cinq candidats est victorieux selon un des modes de scrutin examinés!

- Le candidat A est vainqueur si le système de la pluralité est la loi. Un électeur vote pour un candidat (au plus) et celui avec le plus grand nombre de voix gagne. A , avec 33% des voix, gagne.
- Le candidat B gagne selon Borda. Les scores de Borda sont calculés ici en affectant 4 points au premier candidat, 3 au deuxième, 2 au troisième et 1 au quatrième. Ainsi le candidat B reçoit $(3 \times 33) \times (4 \times 16) \times (2 \times 3) \times (2 \times 8) \times (1 \times 18) \times (2 \times 22) = 247$ points. Les scores des autres candidats sont 135 points pour A , 244 points pour C , 192 points pour D et 182 points pour E .
- Le candidat C est le gagnant-Condorcet : il est majoritaire contre n'importe qui, ce qui se voit facilement dans le tableau des face-à-face, la valeur de chaque case dans la ligne de C étant supérieure à 50%.
- Le candidat D gagne sous le régime du vote alternatif. Les scores des premiers choix étant tous moins que 50%, le candidat avec le plus petit nombre de premiers choix, C , est éliminé. Les nouveaux premiers sont : A (33%), B (16%), D (21%) et E (30%). En l'absence de candidat avec une majorité absolue, le candidat B est éliminé et les premiers choix changent une fois de plus : A (33%), D (37%) et E (30%). Toujours aucun candidat avec une majorité absolue. E est éliminé, laissant seulement A et D en lice : D l'emporte.

Voting Rules Matter

5	4	3	2
<u>a</u>	e	d	b
c	b	c	d
b	c	b	e
d	d	e	c
e	a	a	a

► **Plurality**

used in US, Mexico, South Korea, ...

→ a

► **Borda**

used in Slovenia, at Harvard University, ESC, ...

► **Schulze**

used by Pirate Party, Wikipedia, Debian, ...

► **Instant-runoff**

used in Canada, UK, Hollywood (Academy Awards), ...

► **Plurality with runoff**

used in France, Brazil, Russia, ...



Voting Rules Matter

	5	4	3	2
4	a	e	d	b
3	c	b	c	d
2	b	c	b	e
1	d	d	e	c
0	e	a	a	a

$$a: 5 \times 4 = 20$$

$$b: 5 \times 2 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 4 = 36$$

$$c: 5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 3 + 2 = 34$$

$$d: 5 + 4 + 3 \times 4 + 2 \times 3 = 27$$

$$e: 4 \times 4 + 3 + 2 \times 2 = 23$$

► **Plurality**

used in US, Mexico, South Korea, ...

→ a

► **Borda**

used in Slovenia, at Harvard University, ESC, ...

→ b

► **Schulze**

used by Pirate Party, Wikipedia, Debian, ...

► **Instant-runoff**

used in Canada, UK, Hollywood (Academy Awards), ...

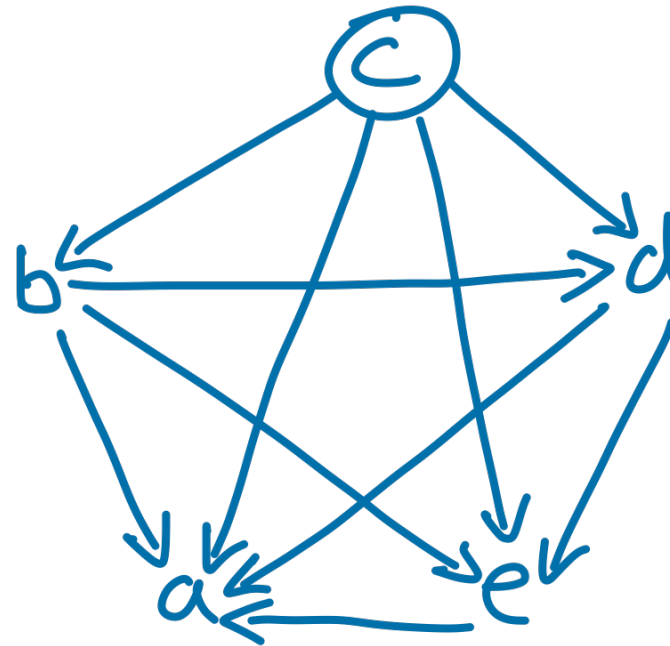
► **Plurality with runoff**

used in France, Brazil, Russia, ...



Voting Rules Matter

5	4	3	2
<i>a</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>



► **Plurality**

used in US, Mexico, South Korea, ...



► **Borda**

used in Slovenia, at Harvard University, ESC, ...



► **Schulze**

used by Pirate Party, Wikipedia, Debian, ...



► **Instant-runoff**

used in Canada, UK, Hollywood (Academy Awards), ...

► **Plurality with runoff**

used in France, Brazil, Russia, ...



Voting Rules Matter

5	4	3	2
<i>a</i>		 <i>d</i> 	
			 <i>d</i> 
			
<i>d</i>	 <i>d</i> 		
	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

- **Plurality**
used in US, Mexico, South Korea, ...  *a*
- **Borda**
used in Slovenia, at Harvard University, ESC, ...  *b*
- **Schulze**
used by Pirate Party, Wikipedia, Debian, ...  *c*
- **Instant-runoff**
used in Canada, UK, Hollywood (Academy Awards), ...  *d*
- **Plurality with runoff**
used in France, Brazil, Russia, ...

Voting Rules Matter

5	4	3	2
a	e	d	b
c	b	c	d
b	c	b	e
d	d	e	c
e	a	a	a

► **Plurality**

used in US, Mexico, South Korea, ...

→ a

► **Borda**

used in Slovenia, at Harvard University, ESC, ...

→ b

► **Schulze**

used by Pirate Party, Wikipedia, Debian, ...

→ c

► **Instant-runoff**

used in Canada, UK, Hollywood (Academy Awards), ...

→ d

► **Plurality with runoff**

used in France, Brazil, Russia, ...

→ e



single profile

multi profile

Plurality

Borda

Schulze

IRV

Plurality w/
Runoff

Condorcet winner paradox



—



Absolute majority paradox

—



—

—

—

Condorcet loser paradox



—

—

—

—

Absolute loser paradox



—

—

—

—

Pareto paradox

—

—

—

—

—

Additional support paradox

—

—

—



Consistency paradox

—

—



No-Show paradox

—

—



Twin paradox

—

—



Subset choice paradox



Preference inversion paradox



—

—



single profile

multi profile

Plurality

Borda

Schulze

IRV

Plurality w/
Runoff

Maximal
Lotteries

Condorcet winner paradox



—



—

Absolute majority paradox

—



—

—

—

—

Condorcet loser paradox



—

—

—

—

—

Absolute loser paradox



—

—

—

—

—

Pareto paradox

—

—

—

—

—

—

Additional support paradox

—

—

—



(—)

Consistency paradox

—

—



—

No-Show paradox

—

—



—

Twin paradox

—

—



—

Subset choice paradox



—

Preference inversion paradox



—

—



—



Turning Impossibilities into Characterizations of Maximal Lotteries



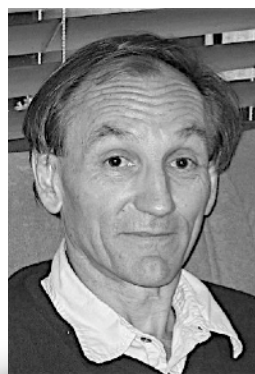
Kenneth J. Arrow

- ▶ Arrow's impossibility (1951)
 - Brandl and B., *Arrovian Aggregation of Convex Preferences* Econometrica (forthcoming)



H. Peyton Young

- ▶ Consistency impossibility (1978)
 - Brandl et al., *Consistent Probabilistic Social Choice* Econometrica (2016)



Hervé Moulin

- ▶ No-show paradox (1988)
 - Brandl et al., *Welfare Maximization Entices Participation* Games and Economic Behavior (2018)





Kenneth J. Arrow

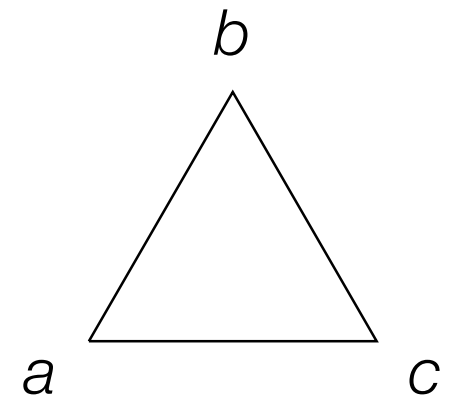
Arrow's Impossibility

- ▶ All social welfare functions (SWF) $f: D^N \rightarrow R$ satisfying
 - ▶ Pareto optimality and
 - ▶ independence of irrelevant alternativesare dictatorial.
- ▶ $D = R =$ all transitive relations
- ▶ Standard approaches to circumvent Arrow's impossibility:
 - ▶ **Relax R** : quasi-transitive, acyclic, path independent prefs
E.g., Sen (1969), Gibbard (1969), Mas-Colell & Sonnenschein (1972), Blau & Deb (1977)
 - ▶ **Restrict D** : dichotomous, single-peaked, value-restricted prefs
E.g., Black (1948), Inada (1969), Sen & Pattanaik (1969)



Convex Preferences

- ▶ Δ : **convex hull** of some finite universal set of alternatives U
 - ▶ Outcomes are distributions of divisible resources such as probability, time, or money
- ▶ $>$: asymmetric preference relation over Δ
 - ▶ $U(p) = \{q \in \Delta: q > p\}$, $L(p) = \{q \in \Delta: p > q\}$, $I(p) = \{q \in \Delta: p \sim q\}$
- ▶ $>$ is **continuous** and **convex**.
 - ▶ For any $p \in \Delta$, $U(p)$ and $L(p)$ are *open* and $U(p)$, $L(p)$, $U(p) \cup I(p)$, and $L(p) \cup I(p)$ are *convex*.
- ▶ Note the **absence of transitivity**.
- ▶ Theorem (Sonnenschein, 1971): $>$ **admits a maximal element** in every non-empty, compact, and convex set.





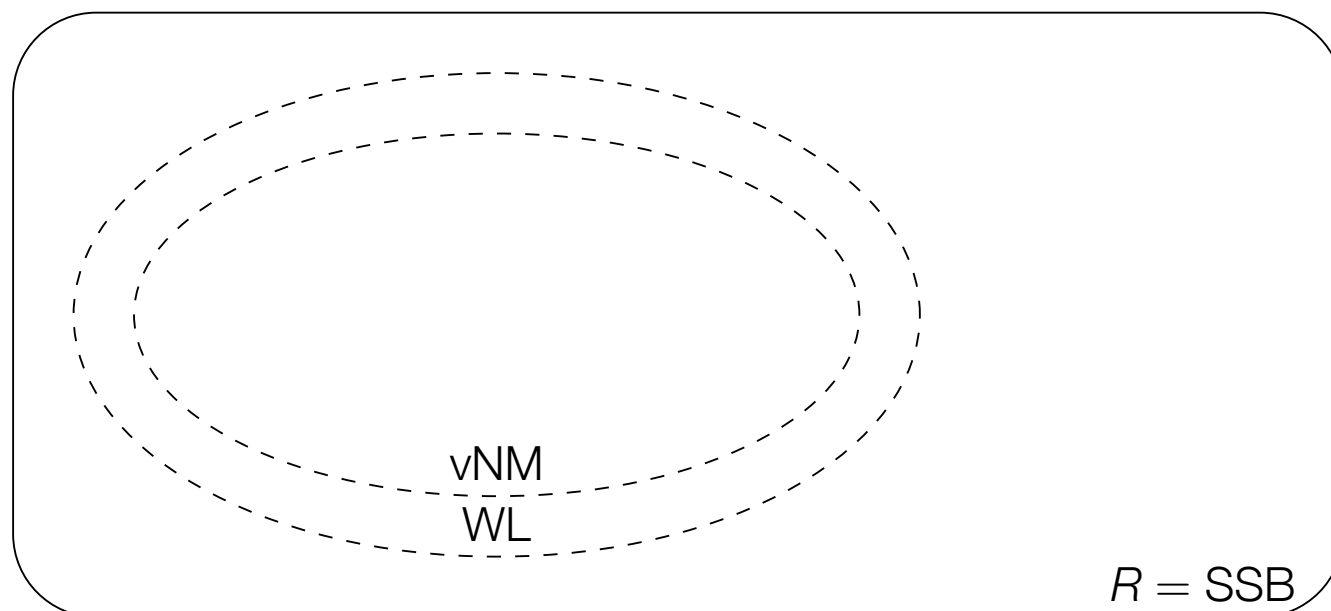
Peter C. Fishburn

SSB Utility Functions

- ▶ Theorem (Fishburn, 1982): There is a skew-symmetric, bilinear (SSB) function $\phi: \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ such that for all $p, q \in \Delta$,

$$p > q \Leftrightarrow \phi(p, q) > 0$$

iff $>$ satisfies an axiom called *symmetry*.



$$p^T \phi q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1/3 & 0 & 2/3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= 1/3 > 0$$



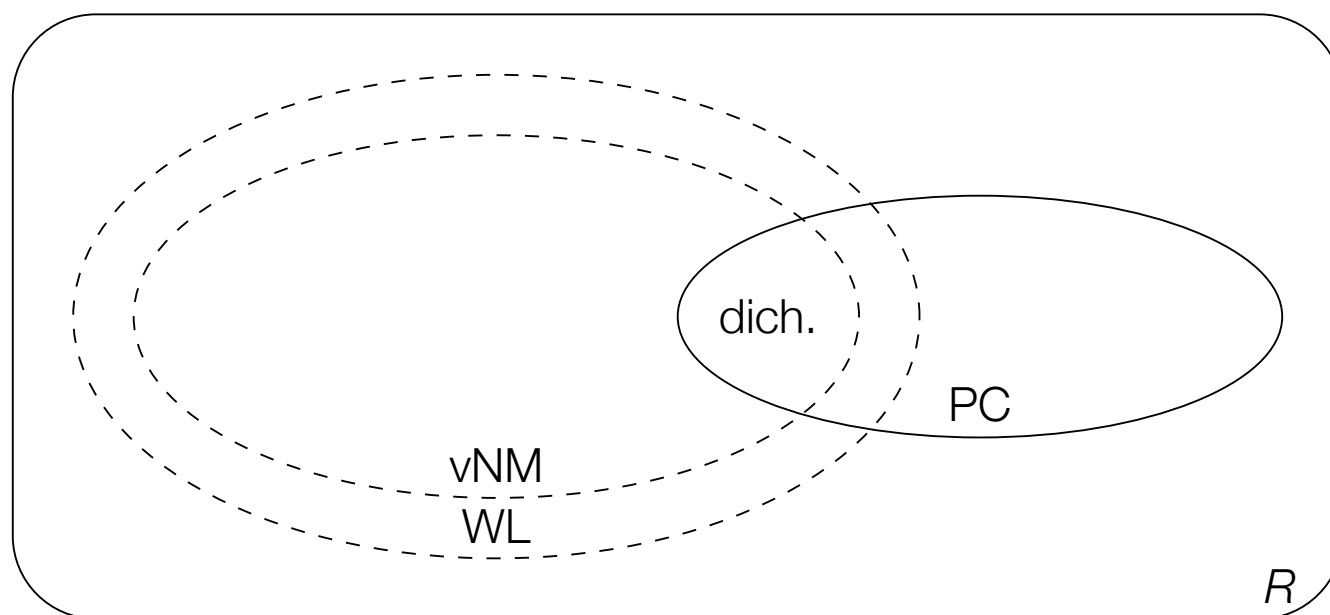
Preference Aggregation

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$: finite set of **agents**
- ▶ $D \subseteq R$: **domain** of preference relations
- ▶ $f: D^N \rightarrow R$: Arrovian SWF satisfying
 - ▶ **Pareto optimality**: Let $p, q \in \Delta$, $R_N \in D^N$, and $f(R_N) = p$.
 $(\forall i \in N: p \sim_i q) \Rightarrow p \sim q$
 $(\forall i \in N: p \succeq_i q) \wedge (\exists i \in N: p \succ_i q) \Rightarrow p \succ q$.
 - ▶ **Independence of irrelevant alternatives**: Let $R_N, R'_N \in D^N$ and $X \subseteq U$.
 $R_N|_{\Delta X} = R'_N|_{\Delta X} \Rightarrow f(R_N)|_{\Delta X} = f(R'_N)|_{\Delta X}$.



When is Arrovian Aggregation possible?

- ▶ Theorem 1: Let f be an anonymous Arrovian SWF on some rich domain D with $|U| \geq 4$. Then, $D \subseteq PC$.
- ▶ PC (**pairwise comparison**): $\phi(a,b) \in \{-1, 0, +1\}$ for all $a, b \in U$.
- ▶ $p \succ q \Leftrightarrow p$ is more likely to return a better alternative than q .
 - ▶ Evidence for PC prefs (Blavatskyy, 2006; Butler & Pogrebna, 2018)



$$p^T \phi q = \begin{matrix} & 1/3 & 0 & 2/3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= 1/3 > 0$$



How is Arrovian Aggregation possible?

- ▶ Theorem 2: Let f be an Arrovian SWF on some rich domain $D \subseteq PC$ with $|U| \geq 5$. Then,

$$f(R_N) = \sum_{i \in N} w_i \phi_i$$

with $w_i > 0$ for all $i \in N$.

- ▶ Corollary: Let $|U| \geq 5$ and D be a rich domain. An *anonymous* SWF is Arrovian iff

$$f(R_N) = \sum_{i \in N} \phi_i \quad \text{and} \quad D \subseteq PC.$$

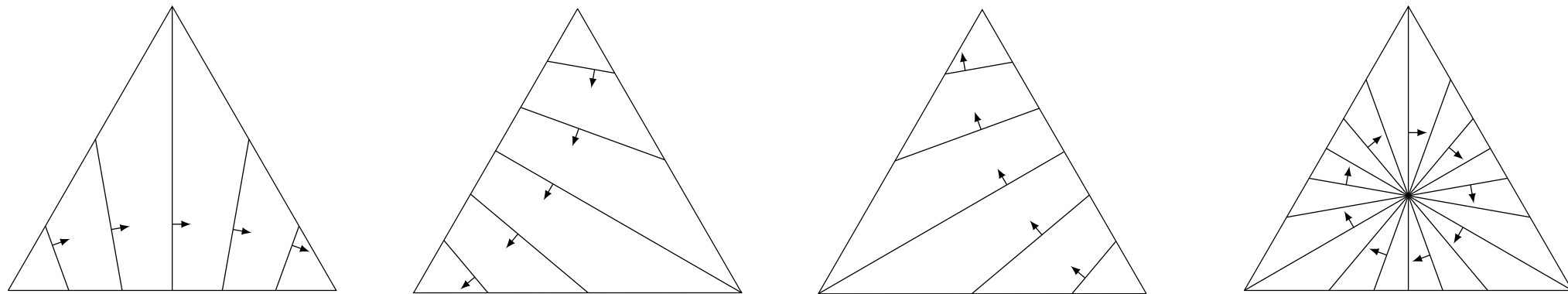
- ▶ $p > q \Leftrightarrow$ it is more likely that a randomly selected agent prefers the outcome of p to that of q



Example

- ▶ Collective prefs over alternatives coincide with **majority rule**.
- ▶ Majority cycle:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



- ▶ Unique collectively most preferred outcome is $(1/3, 1/3, 1/3)$.
- ▶ **Maximal lottery** (Kreweras, 1965; Fishburn, 1984)

Further Results

- ▶ Continuity and convexity are necessary and sufficient for **consistent choice behavior** (in the form of Sen's α and γ).
- ▶ When restricting attention to **v. Neumann-Morgenstern prefs**,
 - ▶ Arrovian aggregation is only possible for dichotomous preferences and only via “approval voting”.
- ▶ You can play around with maximal lotteries on voting.ml.

