

Der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 2020 und seine Bezüge zum Operations Research

Ein Kommentar von Martin Bichler, TU München

Märkte modellieren! Die Wegbereiter

Der diesjährige Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an Paul Milgrom and Robert B. Wilson, beide von der Universität Stanford, wurde vergeben für "improvements to auction theory and inventions of new auction formats." Nobelpreise stellen Teilgebiete der Wirtschaftswissenschaften in das Rampenlicht einer breiteren Öffentlichkeit. Die Preisverleihung an Kantorowitsch und Koopmans (1975) für ihre Beiträge zur linearen Optimierung war wegweisend für die weitere Entwicklung des Operations Research. Während sich diese Arbeiten auf Ressourcenallokationsprobleme mit einem einzelnen Entscheider konzentrieren, stehen in den Wirtschaftswissenschaften oft Fragestellungen im Mittelpunkt, die sich mit der Interaktion mehrerer Entscheider in Märkten auseinandersetzen. Eine Reihe von Nobelpreisen wurde für Beiträge in diesem Gebiet verliehen. Hierzu zählen beispielsweise die Nobelpreise an Arrow (1972) und Debreu (1985) für ihre Arbeiten zur allgemeinen Gleichgewichtstheorie (Arrow & Debreu, 1954). Diese Modelle folgten der Tradition von Léon Walras im 19. Jahrhundert und dessen Bestreben, Märkte mathematisch zu modellieren. Die Hauptsätze der Wohlfahrtsökonomie basieren auf der allgemeinen Gleichgewichtstheorie und besagen, dass unter bestimmten Annahmen Marktgleichgewichte Pareto-effizient sind und dass es zu jeder Pareto-effizienten Allokation auch Preise gibt, die ein Marktgleichgewicht darstellen. Diese Aussagen sind erst einmal bemerkenswert und gelten als theoretisches Argument für die Nutzung von Märkten zur Ressourcenallokation und für eine marktbasierende Wirtschaft allgemein. Die Modelle wurden als eine formale Untermauerung der Adam Smith zugeschriebenen These der "unsichtbaren Hand" verstanden: Wenn alle Marktteilnehmer an ihrem eigenen Wohl orientiert seien, führe der Markt zu einer optimalen Allokation von Ressourcen.

Allerdings basieren diese Existenzaussagen in der allgemeinen Gleichgewichtstheorie auf sehr starken Annahmen, die in der Realität kaum anzutreffen sind. Die Marktteilnehmer in diesen Modellen sind nicht strategisch, es herrscht vollständige Information über ihre konvexen Präferenzen und die Güter sind beliebig teilbar. Zentrale Ergebnisse über die Existenz von Gleichgewichten basieren auf Fixpunktsätzen und sind nicht konstruktiv bzw. zeigen nicht, wie Gleichgewichte zustande kommen. Der Ökonom Nicholas Georgescu-Roegen schrieb dazu: "There are endeavors that now pass for the most desirable kind of economic contributions although they are just plain mathematical exercises, not only without any economic substance but also without any mathematical value" (Georgescu-Roegen, 1979). Andere verteidigten die Arbeiten als Modell, das einfach zeigt, wie stark die Bedingungen sein müssen, damit ein Markt zu Pareto-effizienten Lösungen führt. In sehr großen Märkten mit vielen „kleinen“ Teilnehmern ist der Einfluss Einzelner auf die Preise gering und nicht-konvexe Präferenzen spielen eine untergeordnete Rolle, wie das Shapley-Folkman-Theorem zeigt (Starr, 1969). Damit diese Aussagen greifen, müssen Märkte allerdings sehr groß sein. Auf die meisten realen Märkte mit einer begrenzten Anzahl von Marktteilnehmern und (meist unteilbaren) Gütern lassen sich die Aussagen nicht übertragen. In einigen Arbeiten beschäftigt sich Milgrom mit Annahmen für die Präferenzen von Marktteilnehmern, die einfache Walrasianische Gleichgewichtspreise unter vollständiger Information erlauben (P. Milgrom, 2009). Walrasianische Gleichgewichtspreise sind Preise pro Gut, bei denen alle Marktteilnehmer ihren Nutzen (hier im Sinne von Wert minus Preis definiert), maximieren. Leider sind diese Annahmen so eng, dass reale Mehrgütermärkte diese nur selten erfüllen. Insbesondere spielt aber strategisches Verhalten auf Märkten eine wichtige Rolle, das in der allgemeinen Gleichgewichtstheorie nicht betrachtet wird.

Strategisches Verhalten auf Märkten

In der Spieltheorie wurden daher frühzeitig Ansätze entwickelt, um strategisches Verhalten zu modellieren. Der Nobelpreis 1994 an John Harsanyi, John Nash und dem nach wie vor einzigen deutschen Wirtschaftsnobelpreisträger, Reinhard Selten, honorierte die Arbeiten in diesem Bereich. Harsanyi entwickelte

dabei die Bayesianische Spieltheorie, die es erlaubt, strategische Entscheidungen unter unvollständiger Information zu modellieren (Harsanyi, 1967). Das führte insbesondere zu Durchbrüchen bei der Modellierung von Auktionen. So ging der Nobelpreis 1996 dann auch an William Vickrey vor allem für seine Beiträge zur Auktionstheorie (Vickrey, 1961). Vickrey untersuchte Modelle, in denen die Wertigkeiten der Bieter unabhängig voneinander sind, das sogenannte „independent private values“ (IPV) Modell. Das wohl bekannteste Beispiel für eine Bayes Nash-Gleichgewichtsstrategie ist das einer geschlossenen Erstpreisauktion. Auf Basis der Annahme symmetrischer Bieter wird der Erwartungsnutzen abgeleitet. Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung führt dann zu einer Gleichgewichtsfunktion für die Bieter.

Die Gleichgewichtsanalysen von Vickrey sind elegant, aber schwierig auf komplexere Märkte mit mehreren Gütern oder komplexere Präferenzen zu erweitern, wie sich herausstellt (Krishna, 2009). Gleichgewichtsanalysen in Märkten mit Asymmetrie oder mehreren Gütern enden schnell in einem unlösbaren System partieller Differentialgleichungen. Darüber hinaus ist die Vorhersagegenauigkeit von Bayes Nash-Gleichgewichtsstrategien im Labor oft gering (Bichler, Guler, & Mayer, 2015). Subjekte in Laborexperimenten mit einfachen Erstpreisauktionen bieten konsistent über den im Gleichgewicht vorhergesagten Geboten, was oft als Überbietungsrätsel (engl. overbidding puzzle) bezeichnet wird. Das führte zu einer Kontroverse zwischen experimentellen Ökonomen und Theoretikern, die man in der Dezemberausgabe 1992 der Zeitschrift *American Economic Review* nachlesen kann. Risikoaversion, Unsicherheit über die Rationalität der Wettbewerber und eine Reihe weiterer verhaltensökonomischer Begründungen wurden ins Feld geführt, um diese Diskrepanz zu erklären. Gut verstanden ist das Phänomen aber nach wie vor nicht.

Viele Bemühungen liefen daher in die Entwicklung von ökonomischen Mechanismen mit einfachen dominanten Strategien für die Marktteilnehmer, motiviert durch die bemerkenswerten Eigenschaften der Zweitpreis- oder Vickrey-Auktion. Mechanismusdesign analysiert Mechanismen die anreizkompatibel sind und für die Forschung in diesem Bereich wurde 2007 der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an Leonid Hurwicz, Eric Maskin und Roger B. Myerson verliehen. Paul Milgrom war in den frühen 80er-Jahren in seiner Zeit an der Northwestern University Teil einer Gruppe mit Ökonomen wie Roger Myerson, Bengt Homström, Robert Weber und Mark Satterthwaite, die Spieltheorie und Mechanismusdesign in den Wirtschaftswissenschaften etablierten.

Frühe Beiträge von Milgrom und Wilson

Obwohl Milgrom in vielen Bereichen der Spieltheorie, der Industrieökonomie und der Informationsökonomie Beiträge leistete, war die Auktionstheorie immer ein zentrales Thema. Milgrom und Wilson haben sich beispielsweise bereits frühzeitig damit beschäftigt, wie Annahmen des IPV-Standardmodells relaxiert werden können, um die Modelle realweltnäher zu machen. Wilson ist bekannt für das Common Values-Modell, in dem alle Bieter den gleichen Wert für ein Gut haben, aber alle eine unterschiedliche Einschätzung, wie viel dieses tatsächlich wert ist. Die Versteigerung von Rechten für Ölbohrungen ist ein verbreitetes Beispiel, bei dem sich der Wert für jeden Bieter am Wiederverkaufswert bemisst (Wilson, 1966). Milgrom und Weber erweiterten die Analyse dann auf Umgebungen mit Interdependenzen der Wertigkeiten (P. R. Milgrom & Weber, 1982).

In der Einleitung zu seinem Buch „Putting Auction Theory to Work“ schreibt Paul Milgrom allerdings, dass Spieltheorie insgesamt Ende der 80er Jahre in den Wirtschaftswissenschaften sehr umstritten war (P. Milgrom & Milgrom, 2004). Weder das von Vickrey vorgeschlagene Zweitpreis-Auktionsverfahren noch die Bayes Nash-Gleichgewichtsstrategien für alternative Auktionsverfahren spielten in der Praxis eine große Rolle.

1994 führte dann die US-amerikanische Regulierungsbehörde, die Federal Communications Commission (FCC), die weltweit erste Frequenzauktion durch. Die von Milgrom und seinem Doktorvater Wilson entwickelte Simultaneous Multi-Round Auction (SMRA) brachte dem Feld viel Aufmerksamkeit, sodass Auktionstheoretiker weltweit von Regulatoren und Bietern in diesen Auktionen nachgefragt wurden. Einerseits waren diese Auktionen ein großer Erfolg und die SMRA wurde weltweit von Regulatoren eingesetzt, um wertvolle

Funkfrequenzen zu versteigern. Nach einer Datenbank¹ wurden bisher mindestens 420 Frequenzauktionen in 97 Ländern durchgeführt. Die Erlöse in Ländern wie Deutschland sind regelmäßig mehrere Milliarden Euro und die Ergebnisse der Auktionen definieren den Wettbewerb im Mobilfunkmarkt dieser Länder, haben also enorme industriepolitische Bedeutung (Bichler & Goeree, 2017).

Andererseits offenbarten diese Auktionen auch die großen Lücken in der Theorie, die bis dahin weitgehend Eingüterauktionen oder Auktionen mit gleichartigen Kopien eines Gutes und abnehmendem Grenznutzen der Bieter modellierten. So haben Bieter in Frequenzauktionen oft superadditive Wertigkeiten für Kombinationen von unterschiedlichen Frequenzlizenzen. Beispielsweise hatte die Allokation eines Bündels mit vier 5-MHz-Lizenzen im 2600 MHz-Band in den LTE-Auktionen der vergangenen Jahre aus technischen Gründen einen deutlich höheren Wert für einen Bieter als der vierfache Wert eines einzelnen Blocks. In Ländern wie Australien oder Kanada, in denen regionale Lizenzen versteigert wurden, werden geographisch nebeneinander liegende Lizenzen oft ebenso als Komplemente angesehen (siehe Illustration von „Economic Areas“ in den USA in Abbildung 1).

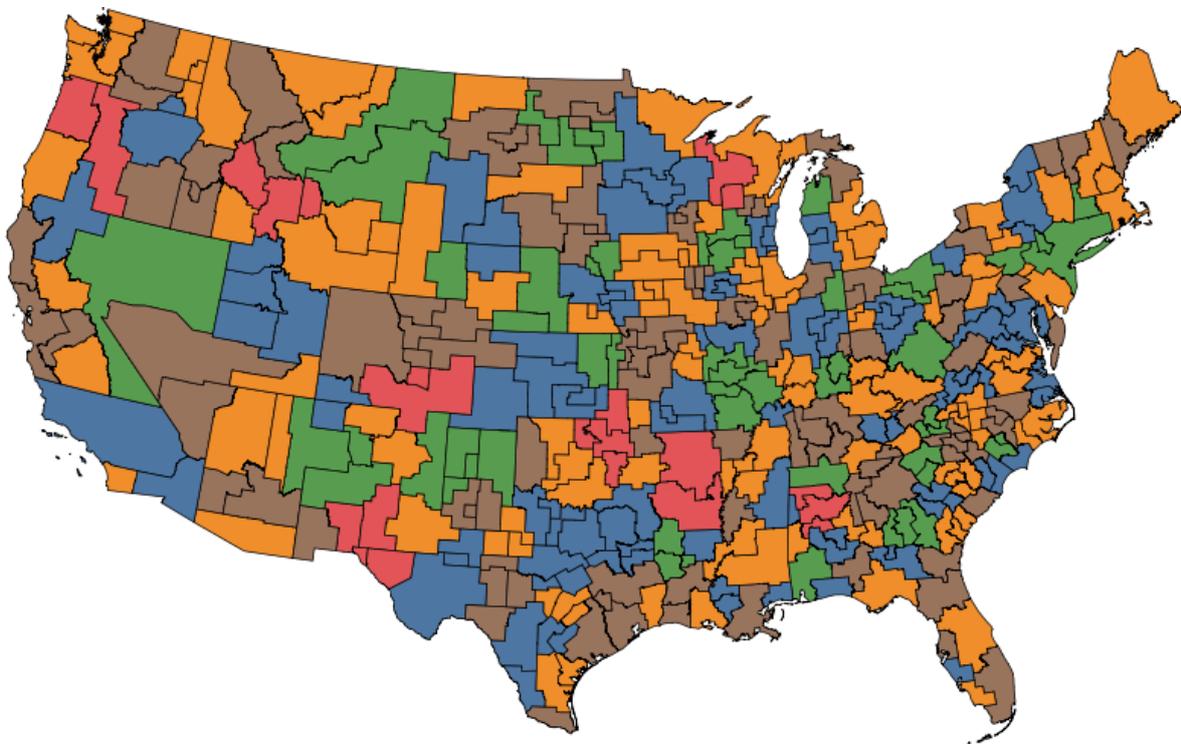


Abbildung 1: Economic Areas in den USA farblich markiert

Eine Gleichgewichtsanalyse der SMRA mit solch komplexen Präferenzen stellte sich als sehr schwierig heraus (Goeree & Lien, 2014). Formale Gleichgewichtsanalysen spielen in der Beratung bei Frequenzauktionen daher kaum eine Rolle. Auch ohne eine formal abgeleitete Gleichgewichtsstrategie ist aber klar, dass Bieter mit superadditiven Wertigkeiten in SMRA strategische Schwierigkeiten haben. Das Bloßstellungsproblem (engl. *exposure problem*) beschreibt die Situation in der ein Bieter versucht, ein Güterbündel (z.B. Gut A und B) mit superadditiven Wertigkeiten in SMRA zu ersteigern. Um das zu erreichen, muss er über die Wertigkeit der Güter A und B einzeln bieten, da Gebote auf Güterbündel nicht möglich sind. Wenn er nur eines der Güter gewinnt, entsteht ihm ein Verlust auf dem anderen Gut. Das führt schnell zu Verlusten für einzelne Bieter und durch strategisches Verhalten auch zu Wohlfahrtsverlusten.

¹ <http://www.dotecon.com/expertise/spectrum-awards-database/>

Was hat das mit OR zu tun?

Dieses Bloßstellungsproblem machte offensichtlich, was aus Sicht des Operations Research wenig überraschend ist. Viele Allokationsprobleme in der Realität sind im Grunde nicht-konvexe Optimierungsprobleme wohingegen die Auktionstheorie auf sehr einfache Allokationsprobleme ohne Nebenbedingungen beschränkt war. In Frequenzauktionen sollten Bieter in der Lage sein, Gebote auf Güterbündel abzugeben, die der Auktionator entweder in Gänze akzeptiert oder ablehnt. Das löst zwar das Bloßstellungsproblem, führt aber für den Auktionator zu einem gewichteten Mengenpackungsproblem (engl. set packing problem). In den ersten Tagungen der FCC zum Design von Frequenzauktionen bestand große Skepsis, ob das Allokationsproblem in einer „kombinatorischen Auktion“ überhaupt in vertretbarer Zeit gelöst werden könne, da es eines der bekannten NP-schweren Optimierungsprobleme ist.

Das Thema hat zahlreiche Kollegen aus der Informatik und dem Operations Research bewegt, sich mit kombinatorischen Auktionen zu beschäftigen (Bichler, 2017; Day & Cramton, 2012; Nisan, Roughgarden, Tardos, & Vazirani; Pekeč & Rothkopf, 2003). Während anfangs die Aufmerksamkeit in Operations Research und Informatik auf algorithmischen Fragen lag, wurden zunehmend spieltheoretische Aspekte kombinatorischer Auktionen auch in diesen Disziplinen untersucht. Paul Milgrom war einer der Vorreiter in diesem Bereich. Gemeinsam mit seinen Kollegen Larry Ausubel und Peter Cramton entwickelte er die Combinatorial Clock Auction (CCA), ein Verfahren das seit 2008 in vielen Staaten weltweit die SMRA ablöste. Das Verfahren nutzt kombinatorische Optimierung zur Lösung des Allokationsproblems und quadratische Optimierung zur Berechnung der Preise und besteht aus zwei Phasen, die über eine komplexe Aktivitätsregel miteinander verknüpft sind. Das Regelwerk führt allerdings auch zu signifikanten strategischen Problemen, die in einer Reihe von Aufsätzen aufgearbeitet wurden. Insbesondere können Anreize entstehen, die zu Preistreiberei und sehr hohen Preisen in der CCA führen - ein Phänomen, das in mehreren Ländern beobachtet wurde (Bichler & Goeree, 2017; Bichler, Shabalin, & Wolf, 2013; Janssen & Kasberger, 2019; Kroemer, Bichler, & Goetzendorff, 2016; Levin & Skrzypacz, 2016). Nachdem das Bloßstellungsproblem in vielen Märkten aber eine so zentrale Rolle für die Bieter spielt, wird das Verfahren auch heute noch (in unterschiedlichen Versionen) in Frequenzauktionen eingesetzt.

Die formale spieltheoretische Analyse von kombinatorischen Auktionen ist nach wie vor unterentwickelt. Bayes Nash-Gleichgewichtsstrategien für die CCA konnte man für spezielle Umgebungen mit zwei Gütern und drei Spielern mit einfachen Präferenzen ableiten (Goeree & Lien, 2016; Guler, Bichler, & Petrakis, 2016). Das gibt zwar Einblicke, aber die Berechnung von Bayes Nash Gleichgewichtsstrategien für realistische Situationen in Frequenzauktionen ist nach wie vor nicht in Sicht. Das mag Komplexitätstheoretische Gründe haben. So konnten Cai und Papadimitriou für eine spezielle Art von Mehrgüterauktionen zeigen, dass die Berechnung einer Bayes Nash Gleichgewichtsstrategie PP-schwer ist, eine Komplexitätsklasse weit jenseits der im Operations Research verbreiteten NP-schweren Probleme. Bereits die Existenz von Bayes Nash-Gleichgewichten ist sehr schwierig zu zeigen. Aber auch hier gehen die ersten Arbeiten auf Paul Milgrom zurück (P. R. Milgrom & Weber, 1985).

Ein Meisterstück gelang mit dem Design der zwischen 2016 und 2017 durchgeführten „Incentive Auctions“. Mit diesen Auktionen versuchte die FCC das von Fernsehsendern nicht mehr benötigte Frequenzspektrum an Mobilfunkunternehmen zu transferieren. Dieser Transfer sollte freiwillig und marktbasierend erfolgen. Relativ schnell war aber klar, dass traditionelle Auktionsverfahren das Problem nicht lösen würden. Bei dem Allokationsproblem handelt es sich um ein sehr großes kombinatorisches Optimierungsproblem (ähnlich dem Färbungsproblem in Graphen), bei dem zahlreiche Nebenbedingungen durch Interferenzen berücksichtigt werden müssen. Sogar moderne Software zur Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme kam hier an die Grenzen. Paul Milgrom leitete ein Team aus Informatikern und Ökonomen, die ein mehrstufiges Auktionsverfahren entwickelten, das mit verschiedenen Heuristiken und Techniken aus dem Bereich der SAT-Lösungsverfahren zu sehr guten Lösungen für das Allokationsproblem kam und daneben dominante Strategien für wahrheitsgemäßes Bieten für einzelne Bieter und sogar Gruppen von Bietern hat. Das machte das Bieten in

diesen Auktionen sehr einfach. Die spieltheoretischen Ergebnisse basieren zwar in Teilen auf etwas vereinfachenden Annahmen, die darunter erzielten spieltheoretischen Eigenschaften sind allerdings außergewöhnlich. Die Auktion führte zu einem Ertrag von 19,8 Milliarden US Dollar, wovon 7,3 Milliarden an den Staat gingen, der Rest an die Fernsehstationen (Leyton-Brown, Milgrom, & Segal, 2017). Das Projekt wurde weithin als Erfolg gefeiert und als Beispiel für modernes Marktdesign.

Marktdesign vs. Mikroökonomie

Die Kritik an ökonomischen Marktmodellen früherer Jahre bezog sich oft auf vereinfachende Annahmen und damit einer gewissen Praxisferne der Modelle. Marktdesign ist ein vergleichsweise neues interdisziplinäres Fach zwischen den Wirtschaftswissenschaften, der Informatik und dem Operations Research. Bereits 2012 wurden Alvin Roth und Lloyd Shapley mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften und für ihre Beiträge im Marktdesign ausgezeichnet. Der Schwerpunkt lag allerdings auf Matching-Märkten ohne monetäre Transfers.² Ähnlich der Tradition im Operations Research werden Modellannahmen im Marktdesign deutlich stärker an Anforderungen konkreter Anwendungen festgemacht, als das sonst oft in der Mikroökonomie der Fall ist. Neben der Vergabe von Frequenzlizenzen (Bichler, Milgrom, & Schwarz, 2020) kam Marktdesign bei der Gestaltung von Transportmärkten (Caplice & Sheffi, 2006), in Beschaffungsauktionen (Elmaghraby & Keskinocak, 2004), beim Handel von Fischfangrechten (Bichler, Fux, & Goeree, 2019), oder auf Elektrizitätsmärkten (Cramton, 2017) zum Einsatz. Um letztere hat sich insbesondere Robert Wilson sehr verdient gemacht (Wilson, 2002). Für das Operations Research wenig überraschend manifestieren sich solche Realwelthanforderungen oft als Nebenbedingungen mathematischer Optimierungsprobleme. Marktdesign kann somit in vielen Fällen als Erweiterung von Modellen aus dem Operations Research um spieltheoretische und verhaltensökonomische Aspekte verstanden werden.

Das soll nicht heißen, dass es sich im Wesentlichen um die Lösung von mathematischen Optimierungsproblemen handle. Wie Preise in solchen Märkten mit nicht-konvexen Allokationsproblemen bestimmt werden und wie Bieter sich darin strategisch verhalten, das sind nach wie vor offene und auch für die OR-Community spannende Forschungsfragen. Ganz ähnlich zu den Fragen aus der allgemeinen Gleichgewichtstheorie möchte man auch hier verstehen, unter welchen Bedingungen stabile Marktgleichgewichte möglich sind und ob diese Gleichgewichte wohlfahrtsmaximierend sind. Das Verhalten von Bietern in solchen optimierungsbasierten Auktionsverfahren ist weitgehend unerforscht, ganz zu schweigen von spieltheoretischen Gleichgewichtsstrategien oder komplexen Präferenzmodellen. Ob die „unsichtbare Hand“ von Adam Smith also zu einer optimalen Allokation in komplexen Märkten führen kann, ist nach wie vor eine spannende Frage.

Die INFORMS hat daher vor einigen Jahren bereits die „Section on Auctions and Market Design“³ ins Leben gerufen, in der neben Vertretern des Operations Research und der Informatik sowohl Alvin Roth als auch Paul Milgrom dem Board angehören. Auch in der GOR gibt es eine wachsende Gruppe von Kollegen, die sich mit verwandten spieltheoretischen und experimentellen Fragen auseinandersetzen (z.B. in der Arbeitsgruppe Game Theory and Behavioral Management).

Fazit

Der Artikel soll die zahlreichen Querbeziehungen zwischen modernem Marktdesign und dem Operations Research herausarbeiten. Modernes Marktdesign muss in vielen Fällen berücksichtigen, dass Allokationsprobleme schwierige Optimierungsprobleme sind. Dadurch kommen Techniken aus dem Operations Research - angefangen von diskret-konvexer Analysis über lineare oder ganzzahlig-lineare Programmierung bis hin zur Bilevel-Optimierung - große Bedeutung zu. Paul Milgrom und Robert Wilson gebührt Dank dafür, dass

² Bemerkenswert ist, dass neben Paul Milgrom auch die Nobelpreisträger Alvin Roth und Bengt Holmström zu den Doktoranden von Robert Wilson gehören.

³ <https://connect.informs.org/auctionsandmarketdesign>

sie Auktionen und Marktdesign zu einem etablierten Feld in den Wirtschaftswissenschaften gemacht haben. Mikroökonomische Modelle standen oft in der Kritik vereinfachender Annahmen und damit geringer Realweltrelevanz der Ergebnisse. Die Arbeiten von Milgrom und Wilson zeigen, dass solide theoretische Analysen und Praxisrelevanz kein Widerspruch sein müssen. Auktionen und Marktdesign sind ein El Dorado für das Operations Research und zweifellos einer der Wachstumsbereiche unseres Feldes.

Martin Bichler, Fakultät für Informatik, TU München

Der Autor ist derzeit Präsident der INFORMS Section on Auctions and Market Design und arbeitet seit mehreren Jahren mit Paul Milgrom an Marktdesignprojekten. Eine sehr gute weiterführende Beschreibung der Arbeiten von Milgrom und Wilson findet sich im Text des Nobel-Komitees.⁴

Literatur

- Arrow, K. J., & Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 24(3), 265-290.
- Bichler, M. (2017). *Market design: a linear programming approach to auctions and matching*: Cambridge University Press.
- Bichler, M., Fux, V., & Goeree, J. K. (2019). Designing combinatorial exchanges for the reallocation of resource rights. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(3), 786-791.
- Bichler, M., & Goeree, J. K. (2017). *Handbook of spectrum auction design*: Cambridge University Press.
- Bichler, M., Guler, K., & Mayer, S. (2015). Split-Award Procurement Auctions—Can Bayesian Equilibrium Strategies Predict Human Bidding Behavior in Multi-Object Auctions? *Production and Operations Management*, 24(6), 1012-1027.
- Bichler, M., Milgrom, P., & Schwarz, G. (2020). *Taming the Communication and Computation Complexity of Combinatorial Auctions: The FUEL Bid Language*.
- Bichler, M., Shabalin, P., & Wolf, J. (2013). Do core-selecting combinatorial clock auctions always lead to high efficiency? An experimental analysis of spectrum auction designs. *Experimental Economics*, 16(4), 511-545.
- Caplice, C., & Sheffi, Y. (2006). Combinatorial auctions for truckload transportation. *Combinatorial auctions*, 21, 539-571.
- Cramton, P. (2017). Electricity market design. *Oxford Review of Economic Policy*, 33(4), 589-612.
- Day, R. W., & Cramton, P. (2012). Quadratic core-selecting payment rules for combinatorial auctions. *Operations Research*, 60(3), 588-603.
- Elmaghraby, W., & Keskinocak, P. (2004). Combinatorial auctions in procurement. In *The Practice of Supply Chain Management: Where Theory and Application Converge* (pp. 245-258): Springer.
- Georgescu-Roegen, N. (1979). Methods in economic science. *Journal of economic issues*, 13(2), 317-328.
- Goeree, J. K., & Lien, Y. (2014). An equilibrium analysis of the simultaneous ascending auction. *Journal of Economic Theory*, 153, 506-533.
- Goeree, J. K., & Lien, Y. (2016). On the impossibility of core-selecting auctions. *Theoretical Economics*, 11(1), 41-52.
- Guler, K., Bichler, M., & Petrakis, I. (2016). Ascending combinatorial auctions with risk averse bidders. *Group Decision and Negotiation*, 25(3), 609-639.
- Harsanyi, J. C. (1967). Games with incomplete information played by "Bayesian" players, I-III Part I. The basic model. *Management science*, 14(3), 159-182.
- Janssen, M., & Kasberger, B. (2019). On the clock of the combinatorial clock auction. *Theoretical Economics*, 14(4), 1271-1307.
- Krishna, V. (2009). *Auction theory*: Academic press.
- Kroemer, C., Bichler, M., & Goetzendorff, A. (2016). (Un) expected bidder behavior in spectrum auctions: about inconsistent bidding and its impact on efficiency in the combinatorial clock auction. *Group Decision and Negotiation*, 25(1), 31-63.
- Levin, J., & Skrzypacz, A. (2016). Properties of the combinatorial clock auction. *American Economic Review*, 106(9), 2528-2551.

⁴ <https://www.nobelprize.org/uploads/2020/09/advanced-economicsciencesprize2020.pdf>

- Leyton-Brown, K., Milgrom, P., & Segal, I. (2017). Economics and computer science of a radio spectrum reallocation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(28), 7202-7209.
- Milgrom, P. (2009). Assignment messages and exchanges. *American Economic Journal: Microeconomics*, 1(2), 95-113.
- Milgrom, P. (2004). *Putting auction theory to work*: Cambridge University Press.
- Milgrom, P. R., & Weber, R. J. (1982). A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1089-1122.
- Milgrom, P. R., & Weber, R. J. (1985). Distributional strategies for games with incomplete information. *Mathematics of operations research*, 10(4), 619-632.
- Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., & Vazirani, V. V. *Algorithmic Game Theory*, 2007. Google Scholar Google Scholar Digital Library Digital Library.
- Pekeč, A., & Rothkopf, M. H. (2003). Combinatorial auction design. *Management science*, 49(11), 1485-1503.
- Starr, R. M. (1969). Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 25-38.
- Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of finance*, 16(1), 8-37.
- Wilson, R. (1966). *Competitive bidding with disparate information*: Graduate School of Business, Stanford University.
- Wilson, R. (2002). Architecture of power markets. *Econometrica*, 70(4), 1299-1340.